Вјежбе бр 11 (недјеља 11)

Промјена матрице оператора при промјени базе

Нека је $A: X \to Y$ линеаран оператор и X, Y - коначнодимензионални простори. Нека је $\{e_1, e_2, \dots e_m\}$ база у X, а $\{f_1, f_2 \dots f_n\}$ база у Y. Нека је A_{ef} матрица оператора A у односу на базе e и f. Нека је $\{r_1, r_2 \dots r_m\}$ нова база у X, а $\{l_1, l_2 \dots l_n\}$ нова база у Y. Нека је A_{rl} матрица оператора у односу на базе r и l. Нека је P - матрица прелаза са базе $\{e_1, e_2 \dots e_m\}$ на базу $\{r_1, r_2 \dots r_m\}$ простора X, а Θ - матрица прелаза са базе $\{f_1, f_2 \dots f_n\}$ на базу $\{l_1, l_2 \dots l_n\}$. Тада је $A_{lr} = \Theta^{-1} \cdot A_{fe} \cdot P$

Специјално, за $X = Y$ тада $P = \Theta$. $A_r = P^{-1} \cdot A_e \cdot P$.

① Матрица оператора A у стандардној бази је:

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Одредити матрицу оператора A у бази $\{f_1 = (0,-1,-1), f_2 = (1,-1,1), f_3 = (-1,1,0)\}$

Рјешење:

$A: V \to V$

$\{e_1, e_2, e_3\}$ база у V

$\{f_1, f_2, f_3\}$ база у V

P_{ef} - матрица прелаза са $\{e_1, e_2, e_3\}$ на $\{f_1, f_2, f_3\}$

$f_1 = (0,-1,-1) = 0e_1 - 1e_2 - 1e_3$

$f_2 = (1,-1,1) = 1e_1 - 1e_2 + 1 \cdot e_3$

$f_3 = (-1,1,0) = -1e_1 + e_2 + 0e_3$

$$P_{ef} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_f = P_{ef}^{-1} \cdot A_e \cdot P_{ef}$

$P_{ef}^{-1} = ?$

$$\det P_{ef} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot 1 - 1\cdot(-2) = 1$$

$P_{11} = -1,\ P_{12} = -1,\ P_{13} = -2,\ P_{21} = -1,\ P_{22} = -1,\ P_{23} = -1,\ P_{31} = 0,\ P_{32} = +1,\ P_{33} = 1$

$$P_{ef}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

② У простору R^3 дате су базе G: $g_1 = (8, -6, 7)$, $g_2 = (-16, 7, -13)$, $g_3 = (9, -3, 7)$ и база

H: $h_1 = (1, -2, 1)$
$h_2 = (3, -1, 2)$
$h_3 = (2, 1, 2)$

Ако је матрица оператора $A: R^3 \to R^3$ у бази G,

$$A_G = \begin{pmatrix} -1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ -1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

Одредити матрицу оператора A у односу на базу H

Рјешење:

I начин:

P_{GH} - матрица прелаза с G на H.

$A_H = P_{GH}^{-1} \cdot A_G \cdot P_{GH}$

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 \\ h_2 &= \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3 \\ h_3 &= \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3 \end{aligned} \Rightarrow P_{GH} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Ријеши се систем од 3 ј-не, 3 непознате.

II начин:

$[x]_E$ - матрица координата вектора x у бази E, E - стандардна база

$[x]_G$ - -||- -||- x у бази G

$[x]_H$ - -||- -||- -||- x у бази H

$A_H = P^{-1}_{GH} \cdot A_G \cdot P_{GH}$ (*)

P_{EG}, P_{EH}, P_{GH} - одговарајуће матрице прелаза

Важи:

$[x]_E = P_{EG} \cdot [x]_G$
$[x]_E = P_{EH} \cdot [x]_H$ $\Rightarrow$ $P_{EG} \cdot [x]_G = P_{EH} \cdot [x]_H$
$[x]_G = P^{-1}_{EG} \cdot P_{EH} \cdot [x]_H$

Због $[x]_G = P_{GH} \cdot [x]_H$ важи: $P^{-1}_{EG} \cdot P_{EH} = P_{GH}$

$$P_{EG} = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & 13 & 7 \end{pmatrix}, \quad P_{EH} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Налазимо $P_{GH} = P^{-1}_{EG} \cdot P_{EH}$ и вратимо се у (*).

3. Дат је оператор $B: P_{\le 2} \to P_{\le 2}$ задат са $Bp(t) = p(t+1)$. Наћи матрицу оператора у бази $E = \{1, t, t^2\}$ и у бази $B' = \{B(1), B(t), B(t^2)\}$.

Рјешење:

$B(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$
$B(t) = t+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2$
$B(t^2) = (t+1)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot t + 1 \cdot t^2$

$$B_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B' = \{B(1), B(t), B(t^2)\} = \{1, t+1, (t+1)^2\}$

Важи: $B_{B'} = P^{-1}_{EB'} \cdot B_E \cdot P_{EB'}$

$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2$
$t+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2$ $\Rightarrow P_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$(t+1)^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot t + 1 \cdot t^2$

Сада, $B_{B'} = P^{-1}_{EB'} \cdot B_E \cdot P_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Матрица оператора B у бази B' може да се нађе и директно.

Нађимо $B1$, $B(t+1)$ и $B(t+1)^2$. Означимо $p_1(t)=1$, $p_2(t)=t+1$, $p_3(t)=(t+1)^2$

Сада, $p_1(t+1)=\underbrace{1}$, $p_2(t+1)=(t+1)+1=\underbrace{t+2}$, $p_3(t)=t^2+2t+1$ па $p_3(t+1)=(t+1)^2+2(t+1)+1$
$=\underbrace{t^2+4t+4}$,

Одавде,

$$B1=1=\alpha\cdot 1+\beta\cdot(t+1)+\gamma(t+1)^2$$
$$B(t+1)=t+2=\alpha_1\cdot 1+\beta_1(t+1)+\gamma_1(t+1)^2$$
$$B(t+1)^2=t^2+4t+4=\alpha_2\cdot 1+\beta_2(t+1)+\gamma_2(t+1)^2$$

Одавде,

$$\left.\begin{aligned} 1&=\alpha+\beta+\gamma+(\beta+2\gamma)t+\gamma\cdot t^2\\ t+2&=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+(\beta_1+2\gamma_1)t+\gamma_1 t^2\\ t^2+4t+4&=\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+(\beta_2+2\gamma_2)t+\gamma_2 t^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&\gamma=0;\ \beta+2\gamma=0;\ \alpha=1\\ &\gamma_1=0;\ \beta_1+2\gamma_1=1;\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2\\ &\gamma_2=1;\ \beta_2+2\gamma_2=4;\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=4\end{aligned}$$

Матрица $B_{B'}=\begin{pmatrix}\alpha & \alpha_1 & \alpha_2\\ \beta & \beta_1 & \beta_2\\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}}$

4) Нека је оператор $A: R^3\to P_1[x]$ задат са:

$$A(a,b,c)=(2a+b)x+(b-c)$$

а) Доказати да је A линеаран

б) Одредити матрицу оператора A у базама $\{(0,1,2),(0,3,0),(1,1,0)\}$ и $\{2x+1,x\}$

в) Одредити ранг и дефект оператора A.

Решење:

а) домаћи

б) $A(0,1,2)=1\cdot x+(1-2)=x-1=\alpha\cdot(2x+1)+\beta\cdot x$

$A(0,3,0)=3x+3=\alpha_1(2x+1)+\beta_1\cdot x$

$A(1,1,0)=3x+1=\alpha_2(2x+1)+\beta_2\cdot x$

Одавде,

$$\left.\begin{aligned} x-1&=(2\alpha+\beta)x+\alpha\\ 3x+3&=(2\alpha_1+\beta_1)x+\alpha_1\\ 3x+1&=(2\alpha_2+\beta_2)x+\alpha_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&\alpha=-1,\ \beta=3\\ &\alpha_1=3;\ \beta_1=-3\\ &\alpha_2=1,\ \beta_2=1\end{aligned}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $Ker A = \{(a,b,c) : A(a,b,c) = 0\} = \{(a,b,c) : (2a+b)x + b - c = 0\}$

$$(2a+b)x + b - c = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2a+b=0 \\ b-c=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2a=-b \\ b=c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b&=-2a \\ c=b&=-2a \end{aligned}$$

$Ker A = \{(a, -2a, -2a), a \in R\} = \mathcal{L}\{(1,-2,-2)\}$

Одавде, $\dim Ker A = 1 \Rightarrow defect A = 1$

Због $\dim R^3 = \dim Ker A + \dim Im A$

$$3 = 1 + \dim Im A$$

$$\dim Im A = 2$$

$$\boxed{r(A) = 2}$$

(5) Нека је у простору X задата база $\{e_1, e_2, e_3\}$ у којој оператор $A : X \to X$ има матрицу A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Одредити матрицу оператора A^2 у бази $\{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$

Решење:

Из матрице оператора „читамо":

$A(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3$

$A(e_2) = -e_2 + 7e_3$

$A(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + 5e_3$

Сада нађимо слике вектора $e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3$

$A(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3$

$A(e_1+e_2) = A(e_1) + A(e_2) = e_1 + e_2 + 8e_3$

$A(e_1+e_2+e_3) = A(e_1) + A(e_2) + A(e_3) = 4e_1 + 3e_2 + 13e_3$

Разложимо слике вектора по новој бази

$A(e_1) = e_1+2e_2+e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2(e_1+e_2) + \alpha_3(e_1+e_2+e_3)$

$A(e_2) = e_1+e_2+8e_3 = \beta_1 e_1 + \beta_2(e_1+e_2) + \beta_3(e_1+e_2+e_3)$

$A(e_3) = 4e_1+3e_2+13e_3 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2(e_1+e_2) + \gamma_3(e_1+e_2+e_3)$

Из прве ј-не:

$$e_1+2e_2+e_3 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)e_1 + (\alpha_2+\alpha_3)e_2 + \alpha_3 e_3$$

Сада: $\left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= 1 \\ \alpha_2+\alpha_3 &= 2 \\ \alpha_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_3 &= 1 \end{aligned}$

Слично, ријешимо сљедећа два система.
Добија се:

$\beta_1 = 0;\ \beta_2 = -7,\ \beta_3 = 8$

$\gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = -7,\ \gamma_3 = \cancel{8}13$

Матрица оператора у бази $B=\{e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3\}$ је:

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -7 & -10 \\ 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора A^2 у истој бази је:

$$A_B^2 = A_B \cdot A_B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 12 \\ -18 & -31 & -59 \\ 20 & 48 & 90 \end{pmatrix}$$

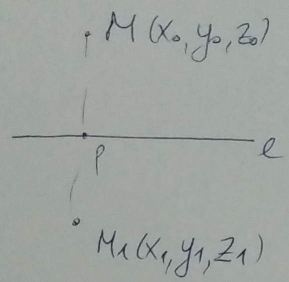
⑥ У бази $B=\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ одредити матрицу оператора $f^{-1}\circ g$ ако је f оператор симетрије простора у односу на праву $l: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, а оператор g је дат са:

$$g(x,y,z) = (x+y,\ 2y,\ x-z)$$

Рјешење:

Прво нађимо матрицу оператора $f^{-1}\circ g$ у односу на стандардну базу $\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$.

Нађимо f^{-1}!



Уочимо да је $\underline{f(f(x)) = x}$, $\forall x$.

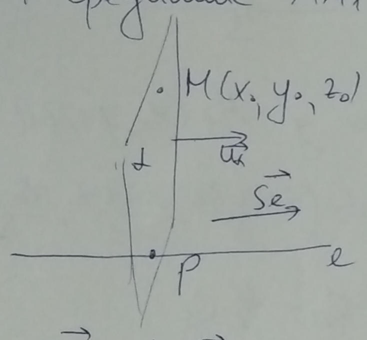
Због $f^{-1} \circ f = i$, имамо: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, тј. $\underline{f^{-1}(f(x)) = x}$, па је $f^{-1} = f$.

Нека је $M(x_0, y_0, z_0)$ произвољна тачка простора. Нађимо тачку M_1, симетричну тачки M у односу на l.

α - раван која садржи M и ортогонална је на l.

$l \cap \alpha = \{P\}$. P - ортогонална пројекција M на l.

P - средиште MM_1



$\vec{n_\alpha} = \lambda \cdot \vec{s_l}$

$\vec{s_l} = (2, 1, -1)$. За $\lambda = 1$, $\underline{\vec{n_\alpha} = (2, 1, -1)}$

α: $M(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n_\alpha} = (2, 1, -1)$

$$2(x - x_0) + 1 \cdot (y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0$$

$$2x + y - z - 2x_0 - y_0 + z_0 = 0.$$

$l \cap \alpha = ?$

$$l: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

Убацимо параметарске j-не у j-ну равни α.

$2(2t)+t-(-t)-2x_0-y_0+z_0=0$

$6t=2x_0+y_0-z_0$

$t=\dfrac{2x_0+y_0-z_0}{6}$

$x=\dfrac{2x_0+y_0-z_0}{3}$

$y=\dfrac{2x_0+y_0-z_0}{6}$

$z=\dfrac{-2x_0-y_0+z_0}{6}$

Дакле, $P\left(\dfrac{2x_0+y_0-z_0}{3}, \dfrac{2x_0+y_0-z_0}{6}, \dfrac{-2x_0-y_0+z_0}{6}\right)$

P средина M_0M_1. Нека $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Сада,

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_0+x_1}{2} &= \frac{2x_0+y_0-z_0}{3} \\ \frac{y_0+y_1}{2} &= \frac{2x_0+y_0-z_0}{6} \\ \frac{z_0+z_1}{2} &= \frac{-2x_0-y_0+z_0}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0+2y_0-2z_0}{3} \\ y_1 &= \frac{2x_0-2y_0-z_0}{3} \\ z_1 &= \frac{-2x_0-y_0-2z_0}{3} \end{aligned}$$

Тачку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ оператор f пресликa у $M_1(x_1,y_1,z_1)$

Нађимо слику базних вектора. $f(x_0,y_0,z_0)=\left(\dfrac{x_0+2y_0-2z_0}{3}, \dfrac{2x_0-2y_0-z_0}{3}, \dfrac{-2x_0-y_0-2z_0}{3}\right)$

$f(e_1)=f(1,0,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}e_1+\frac{2}{3}e_2-\frac{2}{3}e_3$

$f(e_2)=f(0,1,0)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}e_1-\frac{2}{3}e_2-\frac{1}{3}e_3$

$f(e_3)=f(0,0,1)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}e_1-\frac{1}{3}e_2-\frac{2}{3}e_3$

Због $f^{-1}=f$, матрица оператора f^{-1} у бази $\{e_1,e_2,e_3\}$ је:

$$f_E=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Нађимо матрицу оператора g у истој бази $E=\{e_1,e_2,e_3\}$

$g(e_1)=g(1,0,0)=(1,0,1)=1e_1+0e_2+1e_3$

$g(e_2)=g(0,1,0)=(1,2,0)=1e_1+2e_2+0e_3$

$g(e_3) = g(0,0,1) = (0,0,-1) = 0e_1 + 0e_2 - 1 \cdot e_3$

$G_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора g у односу на базу $E = \{e_1, e_2, e_3\}$

Матрица оператора $f^{-1} \circ g$ у бази $\{e_1, e_2, e_3\}$ је:

$$A_E = f^{-1}_E \cdot G_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

P_{EB} – матрица прелаза са E на B.

Сада, $A_B = P_{EB}^{-1} \cdot A_E \cdot P_{EB}$

$b_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$
$b_2 = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3$
$b_3 = 1e_1 + 1e_2 + 1 \cdot e_3$

$\Rightarrow P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Наћи P_{EB}^{-1}.

Матрица $A_B = P_{EB}^{-1} A_E \cdot P_{EB} = \ldots$